ŘEŠENÍ

Cvičení 1. (a) Z centrální limitní věty máme

$$\mathbb{P}\left(u_{\alpha/2} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}X_1}{\sqrt{n}\sqrt{\mathrm{var}X_1}} \leq u_{1-\alpha/2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\alpha,$$

kde $u_{\alpha/2}$ a $u_{1-\alpha/2}$ jsou kvantily normovaného normálního rozdělení. Ekvivalentně,

$$\mathbb{P}\left(u_{\alpha/2} < \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\mathrm{var}X_1}} \leq u_{1-\alpha/2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\alpha.$$

Ekvivalentními úpravami uvnitř pravděpodobnosti a ze vztahu $u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$ dostaneme výsledek

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\mathrm{var}X_1}}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{\mathrm{var}X_1}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\alpha.$$

(b)

- Se zvyšujícím se počtem pozorování (n) se interval zužuje.
- Se zvyšujícím se rozptylem náhodných veličin $X_1, ..., X_n$ se naopak rozšiřuje.
- S rostoucím parametrem α, tj. klesající spolehlivostí $1-\alpha$ se interval zužuje.

(c) Uvědomíme si, že

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\mathrm{var}X_1}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\mathrm{var}X_1}} \cdot \frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{S_n^2}},$$

kde $\sqrt{S_n^2}$ je výběrový rozptyl. Tento bodový odhad skutečného rozptylu je konzistentní, a tedy

$$\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{\mathrm{var}X_1}} \xrightarrow{P} 1.$$

Použím Sluckého věty a použitím ekvivalentních úprav jako v (a) dostaneme výsledek

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} < \mu \leq \bar{X}_n + u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\alpha.$$

(d) Dosazením do (c) dostaneme asymptotický odhad

$$\mathbb{P}(0.468 < \mu \leq 0.492) \approx 0.95.$$

Cvičení 2. Označme $\mu_X = \mathbb{E}X_1$ a $\mu_Y = \mathbb{E}Y_1$. Uvažujme náhodný vývěr $Z_1, ..., Z_50$ definovaný předpisem $Z_i = X_i - Y_i$. Pak

$$\mu_Z = \mathbb{E}Z_1 = \mu_X - \mu_Y, \quad \bar{Z}_{50} = \bar{X}_{50} - \bar{Y}_{50}, \quad \mathrm{var}Z_1 = \mathrm{var}X_1 + \mathrm{var}Y_1.$$

Poslední rovnost platí ze vzájemné nezávislosti náhodných výběrů $X_1, ..., X_{50}$ a $Y_1, ..., Y_{50}$. Zajímá nás odhad parametru μ_Z. Konzistentním odhadem neznámého parametru $\mathrm{var}Z_1$ je $S_{X,n}^2 + S_{Y,n}^2$, součet výběrových rozptylů pro $X_1, ..., X_{50}$, resp. $Y_1, ..., Y_{50}$. Stejnou úvahou jako v předchozím příkladě dojdeme k asymptotickému intervalovému odhadu

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_{50} - \bar{Y}_{50} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{S_{X,50}^2 + S_{Y,50}^2}}{\sqrt{50}} < \mu_X - \mu_Y \leq \bar{X}_{50} - \bar{Y}_{50} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sqrt{S_{X,50}^2 + S_{Y,50}^2}}{\sqrt{50}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\alpha.$$

Dosazením hodnot ze zadání dostaneme

$$\mathbb{P}(-2.62 < \mu_X - \mu_Y \leq 8.94) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\alpha$$

Cvičení 3. Označme náhodné veličiny X =výsledek na 1. kostce, Y =výsledek na 2. kostce, $S = X + Y$. Zajímá nás podmíněné rozdělení X za podmínky $S = 6$, tj. hledáme pravděpodobnosti

$$\mathbb{P}(X = k|S = 6), \quad k \in \{1, ..., 6\}.$$

Nejprve si uvědomíme, že

$$\mathbb{P}(S = 6) = \mathbb{P}(\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}) = \frac{5}{36} > 0.$$

Z definice podmíněného rozdělení je

$$\mathbb{P}(X = 1|S = 6) = \frac{\mathbb{P}([X = 1] \cap [S = 6])}{\mathbb{P}(S = 6)} = \frac{\mathbb{P}(\{(1,5)\})}{5/36} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = 2|S = 6) = \frac{\mathbb{P}(\{(2,4)\})}{5/36} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = 3|S = 6) = \frac{\mathbb{P}(\{(3,3)\})}{5/36} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = 4|S = 6) = \frac{\mathbb{P}(\{(4,2)\})}{5/36} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = 5|S = 6) = \frac{\mathbb{P}(\{(5,1)\})}{5/36} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(X = 6|S = 6) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{5/36} = 0$$

Podmíněná střední hodnota je tedy

$$\mathbb{E}[X|S = 6] = \frac{1}{5}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3.$$

Cvičení 4. Označme $V = X \cdot Y, S = X + Y$, kde X, Y jsou jako v předchozím cvičení. Zajímá nás podmíněné rozdělení náhodné veličiny V za podmínky $S = 6$. Nejprve si uvědomme, jakých hodnot může nabývat V bez ohledu na S, tj. $V \in \{1, ..., 36\}$. Zajímají nás tedy pravděpodobnosti $\mathbb{P}(V = k|S = 6)$ pro $k = 1, ..., 36$. Z definice podmíněného rozdělení

$$\mathbb{P}(V = k|S = 6) = \frac{\mathbb{P}([V = k] \cap \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\})}{5/36} = \frac{\mathbb{P}([V = k] \cap [V \in \{5,8,9\}])}{5/36}$$

a tedy

$$\mathbb{P}(V = k|S = 6) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(\{(1,5),(5,1)\})}{5/36} = \frac{2}{5} & \text{pro } k = 5, \\ \frac{\mathbb{P}(\{(2,4),(4,2)\})}{5/36} = \frac{2}{5} & \text{pro } k = 8, \\ \frac{\mathbb{P}(\{(3,3)\})}{5/36} = \frac{1}{5} & \text{pro } k = 9, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podmíněná střední hodnota je

$$\mathbb{E}[V|S = 6] = 7.$$